3.4.4 共轭性及共轭对称性

共轭性质指

若
$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\mathrm{j}\omega)$$
则
$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-\mathrm{j}\omega) \tag{3-78}$$

可以通过以下方法得出这一性质

因为
$$X(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
上式取共轭，有
$$X^*(\mathrm{j}\omega)=\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]^*=\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
以 $-\omega$ 替代 ω，得
$$X^*(-\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
于是就得到式(3-78) 的关系。

若 $x(t)$为实数，即有
$$x(t)=x^*(t)$$
结合式(3-78)，有
$$X(\mathrm{j}\omega)=X^*(-\mathrm{j}\omega),\ x(t)\text{为实数} \tag{3-79}$$
即 $X(\mathrm{j}\omega)$ 具有共轭对称性。

（1）$x(t)$为实信号

作为式(3-79) 的一个结果，若将 $X(\mathrm{j}\omega)$ 用直角坐标表示为
$$X(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{Re}\{X(\mathrm{j}\omega)\}+\mathrm{j}\mathrm{Im}\{X(\mathrm{j}\omega)\}$$
若 $x(t)$ 为实数，则有
$$\mathrm{Re}\{X(\mathrm{j}\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-\mathrm{j}\omega)\}$$
$$\mathrm{Im}\{X(\mathrm{j}\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-\mathrm{j}\omega)\}$$
也就是说，实数信号傅里叶变换的实部是偶函数，虚部是奇函数。类似地，若 $X(\mathrm{j}\omega)$ 用极坐标表示为
$$X(\mathrm{j}\omega)=|X(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\omega)}$$
那么，根据式(3-79) 容易得出：信号的幅度谱 $|X(\mathrm{j}\omega)|$ 是偶函数，相位谱 $\theta(\omega)$ 是奇函数。因此，对于实数信号的频谱表示，只需给出 $\omega>0$ 部分的频谱就可以了，因为对$\omega<0$的值，可以利用上面导出的对称关系，可直接从 $\omega>0$ 时的值导出。

（2）$x(t)$ 为实值偶函数

根据信号傅里叶变换，可以写出
$$X(-\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
用 $\tau=-t$ 替换，可得
$$X(-\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$
因为 $x(-\tau)=x(\tau)$，所以有
$$X(-\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=X(\mathrm{j}\omega)$$
因此，$X(\mathrm{j}\omega)$ 为偶函数。对式(3-79) 两边取共轭，可得关系
$$X^*(\mathrm{j}\omega)=X(-\mathrm{j}\omega)$$
结合上面两式，有
$$X^*(\mathrm{j}\omega)=X(\mathrm{j}\omega)$$
根据上式，$X(\mathrm{j}\omega)$ 只能是实值函数，虚部为零。因此，当 $x(t)$为实且为偶函数时，其频谱为实值偶函数。

（3）$x(t)$为实且奇函数

同样可以证明，此时，$x(t)$的频谱是纯虚虚数且为奇函数。

（4）作为进一步结果，若一个实函数用其偶部和奇部表示，即
$$x(t)=x_{\mathrm{e}}(t)+x_{\mathrm{o}}(t)$$
其中
$$x_{\mathrm{e}}(t)=\varepsilon_{\mathrm{v}}\{x(t)\}=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$$
$$x_{\mathrm{o}}(t)=\theta_{\mathrm{d}}\{x(t)\}=\frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

根据傅里叶变换的线性，有
$$F\{x(t)\}=F\{x_{\mathrm{e}}(t)\}+F\{x_{\mathrm{o}}(t)\}=\mathrm{Re}\{X(\mathrm{j}\omega)\}+\mathrm{j}\mathrm{Im}\{X(\mathrm{j}\omega)\}$$
并且，根据上面的讨论，$F\{x_{\mathrm{e}}(t)\}$是一实值偶函数，$F\{x_{\mathrm{o}}(t)\}$是一个纯虚虚数且为奇函数，于是可得出以下结论
$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\mathrm{j}\omega)=X(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{Re}\{X(\mathrm{j}\omega)\}+\mathrm{j}\mathrm{Im}\{X(\mathrm{j}\omega)\},\ x(t)\text{为实值函数}$$
$$\varepsilon_{\mathrm{v}}\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} \mathrm{Re}\{X(\mathrm{j}\omega)\}$$
$$\theta_{\mathrm{d}}\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} \mathrm{j}\mathrm{Im}\{X(\mathrm{j}\omega)\} \tag{3-80}$$
也就是说，一个实值信号 $x(t)$ 的频谱的实部是由其偶部贡献，而频谱的虚部是由其奇部贡献。上述结果，完全适用于周期信号的傅里叶级数，见表 3-2。